Apellido: .... Nombre: .... Legajo:..........................

2do Parcial - **MATEMÁTICA SUPERIOR** - 28/11/2017

Tema 48

1 a	1 b	1 c	2 a	2 b	2 c	3 a	3 b	3 c	4	5 a	5 b	Notal Final
0.5 p	0.5 p	1 p	1 p	0.5 p	0.5 p	0.5 p	0.5 p	1 p	2 p	1 p	1 p	

SE APRUEBA CON 6 PUNTOS. TIEMPO DISPONIBLE: 2 HORAS

Ej. n° 1: Dada la ecuación: $0.1\,x^5 - 5\,x^2 - 8\,x + 1 = 0$

a) Indique, sin usar calculadora, la cantidad de raíces reales positivas y negativas. Justifique.

b) Indique qué extremo debería quedar fijo para calcular una raíz en [0;1] por Regula Falsi. Justifique.

c) Haga tres iteraciones por el método de Newton-Raphson, partiendo de $x_0=-0.7$ y explique si converge a alguna raíz, y porqué converge de esa manera.

Ej. n° 2: Dada la siguiente tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	2	4	4,5	5,5	7
$f(x_i)$	7	17	61	K	115	187

a) Halle, si es posible, el o los valores de $k \in R$ tal que el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos sea de grado 2.

b) ¿Es posible hallar algún valor de $k \in R$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3? Justifique su respuesta.

c) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada primera en x=1 y en x=5. Justifique la elección de las fórmulas elegidas.

Ej. n° 3: Indique V o F, justificando correctamente:

a) La convergencia del método de Gauss-Seidel a la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2\,x - y + 4\,z = 4 \\ 7\,x + 4\,y - 2\,z = 8 \\ x + 5\,y + 3\,z = 7 \end{cases}$, depende del vector inicial que se tome.

b) Es posible resolver $I = \int_{1.2}^{4.2} e^{-x^2}\,dx$ por el método de Simpson con h=0.04

c) Si se calcula la integral anterior por Trapecios con cualquier h posible, se obtiene siempre un valor mayor al exacto.

Ej. n° 4: Aproxime la función $f(x) = e^{-x}$ en [0;2] por una recta de mínimos cuadrados. Grafique.

Ej. n° 5: Dada la siguiente ecuación diferencial: $t\,y' + y = 0$ con $y(1) = 1$

a) Halle la constante de Lipschitz

b) Obtenga y(1.2) e y(1.4) por Euler (con h=0.2).

SOLUCION TEMA 48

1) a) Tiene dos raíces reales positivas, y una negativa: -1.5956 , 0.1165 y 4.0999

b) $f(x) = 0.1\, x^5 - 5\, x^2 - 8\, x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0.5\, x^4 - 10\, x - 8 \Rightarrow f''(x) = 2\, x^3 - 10$

Como ambas son negativas en [0;1] debe fijarse b=1

c) Converge a la mayor raíz por estar partiendo cerca de un extremo relativo.

x	f	f'
-0,7	4,133193	-0,87995
	-	
3,99707711	8,83332781	79,6555085
4,10797123	0,7459204	93,3103165
4,09997725	0,00410191	92,2851422

2) a) k=77 para que p(x) de grado 2: $p(x) = 0{,}5\, x^3 - 2\, x^2 + 3\, x + 3$ (no hace falta hallarlo)

1	7					
2	17	10				
4	61	22				
4,5	k	2(k-61)	4(k-72)/5	0		
5,5	115	115-k	2(79-k)	0	0	
7	187	48	2(-67+k)/5	0	0	0

Igualando las diferencias de orden 2 se obtiene k=77

Otra forma es tomando solo los puntos:

1	7		
4	61	54	
7	187	126	72

Armamos el $p(x)= 7 + 54/3\, (x-1) + 72/(2*9)\, (x-1)(x-4)$

$P(x) = 7 + 18\, (x-1) + 4\, (x^2 - 5x + 4) = 7 + 18\, x - 18 + 4\, x^2 - 20\, x + 16$

$P(x) = 4\, x^2 - 2\, x + 5$

Luego verificamos lo otros puntos: $p(2) = 17$ $p(5.5) = 115$ y entonces $p(4.5) = 77 = k$

b) NO es posible.

c) $f'(1) = 17 - 7 = 10$ (progresiva) $f'(5) = 115-77 = 38$ (central)

3) a) FALSO. Lo que determina la convergencia es la condición de diagonal dominante, que se logra intercambiando filas. No depende del vector inicial.

b) FALSO. Quedarían $n = 3/0.04 = 75$ subintervalos, y para Simpson se necesita cantidad par.

c) VERDADERO. Pues la derivada segunda de la función es positiva en dicho intervalo.

4) $p(x) = (-3\, e^{-2})\, x + (2.5\, e^{-2} + 0.5) \cong -0.406\, x + 0.838$

5) a) *Primero despejamos:* $y' = -y / t$ $L=1$

b) Por Euler: $y(1.2) = y(1) + 0.2\, y'(1) = 1 + 0.2\, (-1/1) = 0.8$

$y(1.4) = y(1.2) + 0.2\, y'(1.2) = 0.8 + 0.2\, (-0.8/1.2) = 2/3 = 0.666666666$

28-11-17

① Dada la ecuación $0,1x^5-5x^2-8x+1=0$

a) Indique, sin usar la calculadora, la cantidad de raíces reales positivas y negativas. Justifique.

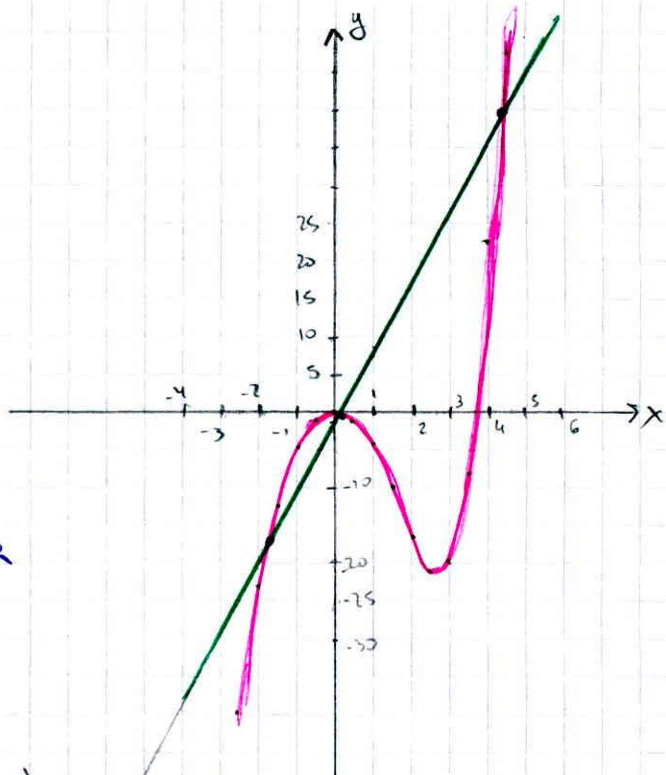
$0,1x^5-5x^2=8x-1$

tiene 3 raíces reales:

1 raíz $\in [-2;-1]$

1 raíz $\in [0;1]$

1 raíz $\in [4;5]$



b) Indique qué extremo debería quedar fijo para calcular una raíz en $[0;1]$ por Regula Falsi. Justifique

$f(x)=0,1x^5-5x^2-8x+1$

$f'(x)=0,5x^4-10x-8 \quad <0 \ \forall x\in[0;1]$

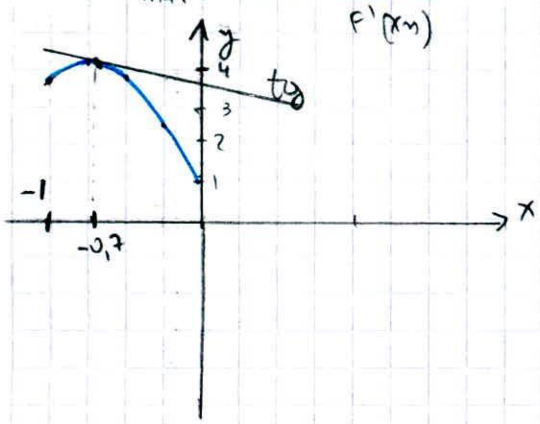
$f''(x)=2x^3-10 \quad <0 \ \forall x\in[0;1]$

Signos iguales → se fija b

$\boxed{\rightarrow \text{se fija } x=1}$

c) Haga tres iteraciones por el método Newton-Raphson, partiendo de $x_0=-0,7$ y explique si converge a alguna raíz y porqué converge de esa manera

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$



$x_0=-0,7$
$x_1=3,99707710 7$
$x_2=4,10797123$
$x_3=4,0999777255$

Converge a $x=4,099932$

Converge de esa manera porque cerca de $x=-0,7$ f alcanza un máximo local por lo que la pendiente de la tangente es muy suave y eso produce que se aleje del x_0

② Dada la sig. tabla de datos

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	2	4	4,5	5,5	7
$f(x_i)$	7	17	61	k	115	187

a) Halle, si es posible, el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de menor grado que interpola todos los puntos sea de grado 2.

tomo 3 puntos equiespaciados y observo si existe un polinomio de grado 2 que los interpole. Si existe, verifico si cumple en los otros puntos y luego hallo k.

$h = 3$

x	$f(x)$	Δf	
1	7		
		54	
4	61		72
		126	
7	187		

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 7 \\ a_1 &= \frac{54}{3} = 18 \\ a_2 &= \frac{72}{2 \times 3^2} = 4 \end{aligned}\right\} \quad p(x) = 7 + 18(x-1) + 4\overbrace{(x-1)(x-4)}^{x^2-5x+4}$$

$$\boxed{p(x) = 4x^2 - 2x + 5}$$

$p(x)$ verifica en $x \in \{1, 2, 4, 5.5, 7\}$ ✓ en $x = 4,5 \rightarrow y_{(4,5)} = \boxed{77 = k}$ ✓

b) ¿es posible hallar algún valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3? Justifique su respuesta

No. El polinomio interpolado hallado es de grado 2. Un valor de k $\neq$ que el hallado en a) dará un polinomio de grado "completo" $\rightarrow$ grado 5

c) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada primera en $x=1$ y en $x=5$. Justifique la elección de las fórmulas elegidas.

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \Rightarrow f'(1) = \frac{f_1 - f_0}{1} = 17 - 7 = \boxed{10 = f'(1)} ✓$$

Como $x=1$ es un extremo, no puedo elegir la central. La Regresiva no la puedo utilizar pues $\nexists$ $x<1$.

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} = \frac{f_4 - f_3}{1} = 115 - 77 = \boxed{38 = f'(5)} ✓$$

Utilicé la central porque aproxima mejor el valor.

③ Indique V o F justificando correctamente:

a) La convergencia del método de Gauss-Seidel a la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x - y + 4z = 4 \\ 7x + 4y - 2z = 8 \\ x + 5y + 3z = 7 \end{cases}$

depende del vector inicial que se tome

$\boxed{F}$ Depende de la matriz asociada, si es diagonal dominante o no.

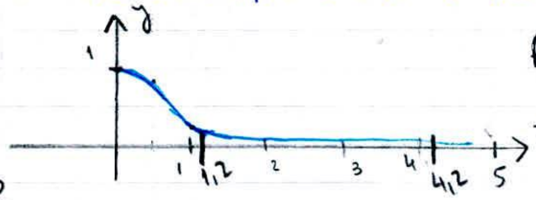
b) Es posible resolver $I = \int_{1,2}^{4,2} e^{-x^2}\,dx$ por el método Simpson con $h = 0{,}04$

$a = 1{,}2$, $b = 4{,}2$, $m \cdot h = b - a \to m \cdot 0{,}04 = 3 \to m = 75 = 2k+1$ $\boxed{F}$

por el método Simpson m es $2k \neq 2k+1$

c) Si se calcula la integral anterior por trapecios con cualquier h posible se obtiene siempre un valor mayor al exacto $\boxed{V}$

$f(x) = e^{-x^2}$



$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$

$f''(x) > 0 \ \forall x \in [1{,}2; 4{,}2]$

$E_T = \underbrace{\overbrace{\frac{a-b}{12}}^{<0}\,\overbrace{h^2}^{>0}}\;\underbrace{f''(\varphi)}_{>0} \to E_T < 0 \to A > I$

---

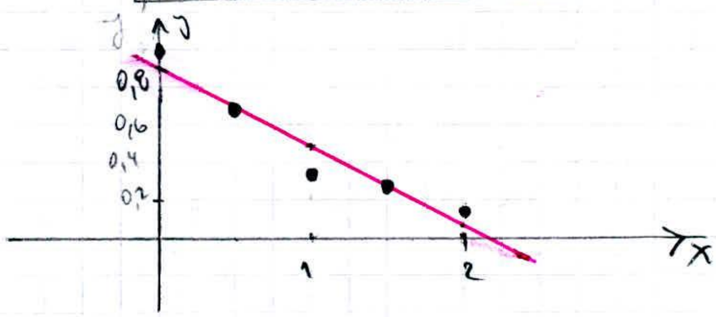
④ Aproxime la función $f(x) = e^{-x}$ en $[0,2]$ por una recta de mínimos cuadrados. Grafique.

tomo $h = 0{,}5 \to$

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,5	1	1,5	2
y_i	1	0,6065	0,3678	0,2231	0,1353

$\sum x_i = 5$ $\quad \sum x_i^2 = 7{,}5$ $\quad \sum x_i y_i = 1{,}2765$ $\quad \sum y_i = 2{,}3329$ $\quad m = 5$

$$\boxed{y = 0{,}8891 - 0{,}4225x}$$



(5) Dada la siguiente ecuación diferencial $ty' + y = 0$, $y(1) = 1$

a) Halle la constante de Lipschitz

$$y' = -\frac{y}{t} \rightarrow f(t,y) = -\frac{y}{t} \rightarrow f'_y = -\frac{1}{t} \text{ en } [1,\infty]\ f'_y \text{ es máx en } x=1$$

$$\boxed{L = 1}$$

b) Obtenga $y(1.2)$ e $y(1,4)$ por Euler (con $h = 0{,}2$)

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)$$

$$t_0 = 1 \rightarrow w_0 = 1$$

$$t_1 = 1{,}2 \rightarrow w_1 = w_0 + h\, f(t_0, w_0) = 1 + 0{,}2 \cdot \overbrace{f(1;1)}^{-1} = \boxed{0{,}8 = w_1}$$

$$t_2 = 1{,}4 \rightarrow w_2 = w_1 + h\, f(t_1, w_1) = 0{,}8 + 0{,}2\, \underbrace{f(1.2; 0.8)}_{-2/3} = \boxed{0{,}66\overline{6} = w_2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y(1{,}2) \cong 0{,}8 \\ \hline y(1.4) \cong 0{,}6\overline{6} \end{array}}$$